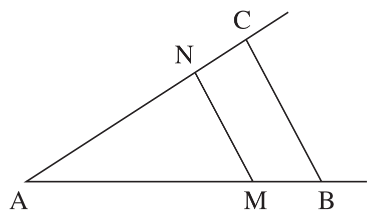
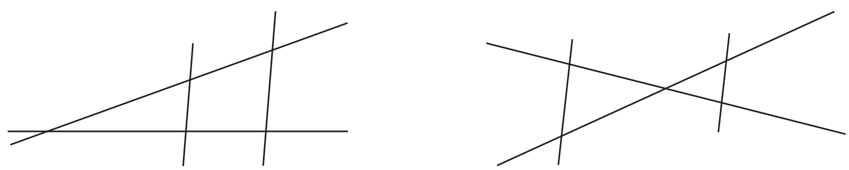
14 Propriétés de Thalès

1 Commentaires généraux

En classe de quatrième, les élèves ont découvert le théorème des milieux, sa réciproque et la propriété $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ dans le cas de figure :



En classe de troisième, cette situation s'enrichit avec le théorème de Thalès et sa « réciproque ». Il ne s'agit pas de la version la plus élaborée du théorème de Thalès puisque seules les deux configurations suivantes sont au programme :



Il s'agit en fait d'une situation préparant l'homothétie qui sera vue ultérieurement. Quant à la « réciproque », il conviendra d'observer l'ordre des points sur les droites. Le plus souvent, cette observation sera faite sur la figure, altérant de ce fait la rigueur des démonstrations. Il faudra là encore attendre les vecteurs et l'homothétie pour avoir des démonstrations rigoureuses, mais ceci est une autre histoire.
Ce chapitre sera l'occasion de reprendre le calcul sur les expressions fractionnaires dans un contexte géométrique ainsi que de nombreuses situations abordées en classe de quatrième (théorème de Pythagore et sa réciproque, par exemple).
Dans le cadre des propriétés de Thalès, seront également reprises les notions d'agrandissement et de réduction. Ces connaissances seront complétées par l'effet sur l'aire de telles reproductions proportionnelles.

2 Objectifs des activités

Activité 1
Prolonger à la configuration croisée les résultats étudiés en 4^e.

Activité 2
Conjecturer le parallélisme à partir d'égalités de quotients.

Activité 3
Conjecturer sur un exemple l'effet sur l'aire d'un agrandissement.

3 Avant de démarrer (solutions)

A. 1. b. 2. a. 3. c.

B. 1. c. 2. a.

C. c.

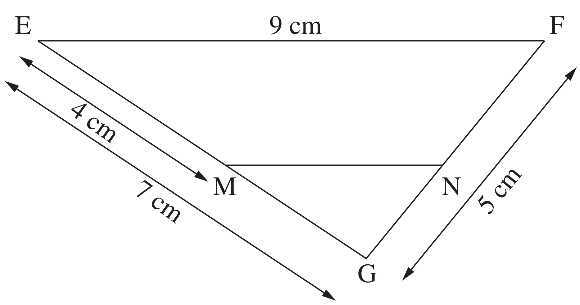
4 Je découvre, j'utilise (solutions)

1 Comme (TK) et (DG) sont sécantes en S et (TD) est parallèle à (GK), on applique le théorème de Thalès :

$$\frac{SK}{ST}=\frac{SG}{SD}=\frac{KG}{TD} \text{ d'où } \frac{SK}{8,4}=\frac{3}{SD}=\frac{4}{5,6}.$$

$$SK=\frac{8,4\times4}{5,6}=6\text{ cm}. \quad SD=\frac{3\times5,6}{4}=4,2\text{ cm}.$$

2 **1.**

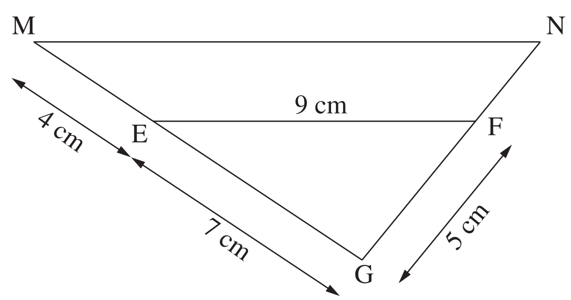


2. (EM) et (FN) sont sécantes en G, (MN) et (EF) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{GM}{GE}=\frac{GN}{GF}=\frac{MN}{EF} \text{ d'où } \frac{3}{7}=\frac{GN}{5}=\frac{MN}{9}.$$

$$GN=\frac{3\times5}{7}\approx2,1\text{ cm}. \quad MN=\frac{3\times9}{7}\approx3,9\text{ cm}.$$

3 **1.**



2. (EM) et (FN) sont sécantes en G, (MN) et (EF) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{GM}{GE}=\frac{GN}{GF}=\frac{MN}{EF} \text{ d'où } \frac{11}{7}=\frac{GN}{5}=\frac{MN}{9}.$$

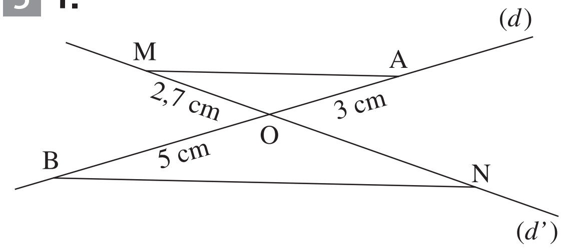
$$GN=\frac{5\times11}{7}\approx7,9\text{ cm}. \quad MN=\frac{9\times11}{7}\approx14,1\text{ cm}.$$

4 (RL) et (MT) sont sécantes en A, (RT) et (ML) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AR}{AL}=\frac{AT}{AM}=\frac{RT}{LM} \text{ d'où } \frac{4,2}{2,4}=\frac{AT}{3,2}=\frac{7}{LM}.$$

$$AT=\frac{3,2\times4,2}{2,4}=5,6\text{ cm}. \quad LM=\frac{7\times2,4}{4,2}=4\text{ cm}.$$

5 **1.**



2. (MN) et (AB) sont sécantes en O, (AM) et (BN) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{OM}{ON}=\frac{OA}{OB}=\frac{MA}{NB} \text{ d'où } \frac{2,7}{ON}=\frac{3}{5}.$$

$$ON=\frac{5\times2,7}{3}=4,5\text{ cm}.$$

6 **a.**

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{ED}{EC}=\dfrac{27}{21} \text{ et } \dfrac{EB}{EA}=\dfrac{45}{35}\\ 27\times35=945\\ 21\times45=945\end{array}\right\} \text{ donc } \frac{ED}{EC}=\frac{EB}{EA}$$

Comme de plus les points E, D et C d'une part, et E, B et A d'autre part sont alignés dans le même ordre, d'après la réciproque du théorème de Thalès, (BD) et (AC) sont parallèles.

b.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{ED}{EC}=\dfrac{14}{20} \text{ et } \dfrac{EB}{EA}=\dfrac{18}{24}\\ 14\times24=336\\ 20\times18=360\end{array}\right\} \text{ donc } \frac{ED}{EC}\neq\frac{EB}{EA}$$

Si (BD) et (AC) étaient parallèles, on aurait l'égalité d'après le théorème de Thalès, ce qui n'est pas le cas. Donc (BD) et (AC) ne sont pas parallèles.

7 **a.**

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{ED}{EF}=\dfrac{12}{28} \text{ et } \dfrac{EB}{EG}=\dfrac{15}{36}\\ 12\times36=432\\ 28\times15=420\end{array}\right\} \text{ donc } \frac{ED}{EF}\neq\frac{EB}{EG}$$

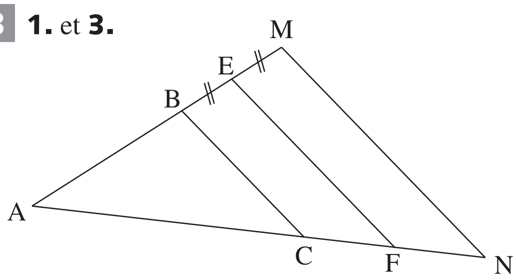
Si (BD) et (FG) étaient parallèles, on aurait l'égalité d'après le théorème de Thalès, ce qui n'est pas le cas. Donc (BD) et (FG) ne sont pas parallèles.

b.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{ED}{EF}=\dfrac{22}{26,4} \text{ et } \dfrac{EB}{EG}=\dfrac{30}{36}\\ 22\times36=792\\ 26,4\times30=792\end{array}\right\} \text{ donc } \frac{ED}{EF}=\frac{EB}{EG}$$

Comme de plus les points B, E, et G d'une part, et D, E et F d'autre part sont alignés dans le même ordre, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BD) et (FG) sont parallèles.

8 **1.** et **3.**

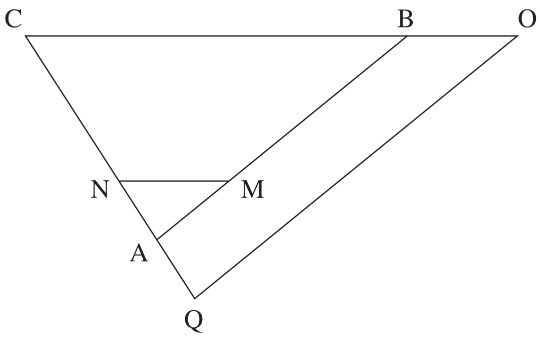


2. Comme (BC) et (EF) sont parallèles, on applique le théorème de Thalès :

$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{4}{3}$.

Dons AEF est bien un agrandissement de ABC de facteur $\frac{4}{3}$.

9 **1.**



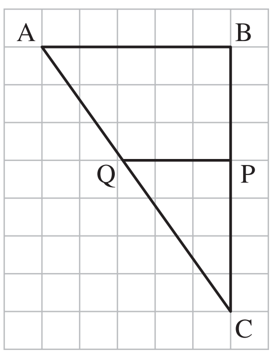
(MN) //(CB) et $AM = 2$ cm .
(OQ) // (AB) et $BO = 2$ cm .

2. $\frac{1}{3}AB = 2$ cm donc $AM = 2$ cm . On place M sur [AB] à 2 cm de A puis on trace la parallèle à (CB) passant par M : le point d'intersection avec [CA] est N.

3. $\frac{9}{7}CB = 9$ cm donc $CO = 9$ cm . On place O sur [CB] à 9 cm de C puis on trace la parallèle à (AB) passant par O : le point d'intersection avec [CA] est Q.

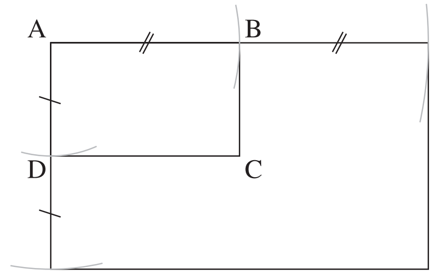
10 **1. c.** $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{5}$.

2.



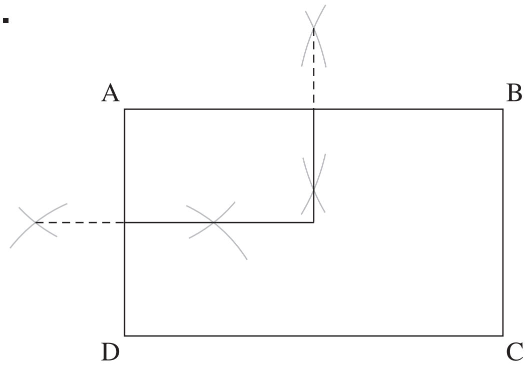
CPQ est une réduction de ABC de rapport $\frac{4}{7}$.

11 **1. a.** et **b.**



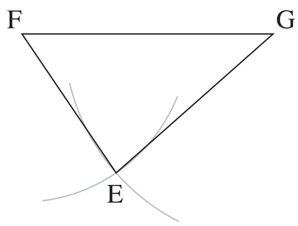
On reporte au compas la longueur AB et la largeur AD.

2.



On cherche avec le compas les milieux de [AB] et [AD].

12 **1.**



$EF = 1{,}4AB = 2{,}8$ cm .
$FG = 1{,}4BC = 4{,}2$ cm .
$EG = 1{,}4AC = 3{,}5$ cm .

2. Dans un agrandissement de rapport 1,4, les aires sont multipliées par $1{,}4^2 = 1{,}96$.
$1{,}96 \times 2{,}48 = 4{,}8608$.
L'aire de EFG arrondie au mm^2 est 4,86 cm^2.

13 **1.** 1 cm^2 est l'aire d'un carré de 1 cm de côté.

2. Dans un carré de 1 cm de côté, il y a 100 carrés de 1 mm de côté (10 lignes de 10 carrés) donc $1\text{ cm}^2 = 100\text{ mm}^2$.

14 Dans une réduction de rapport $\frac{1}{100}$, l'aire est multipliée par $\left(\frac{1}{100}\right)^2 = \frac{1}{10\,000}$. Donc l'aire est divisée par 10 000.

15 C'est faux. Si les dimensions sont multipliées par 2, alors l'aire est multipliée par $2^2 = 4$. Il faut donc quatre fois plus de verre pour réaliser la nouvelle baie.

16 $20 \times 1{,}5 = 30$, donc l'agrandissement est de rapport 1,5.
L'aire est multipliée par $1{,}5^2 = 2{,}25$.
$4 \times 2{,}25 = 9$.
Le deuxième plat correspond à 9 personnes.

5 Faire le point en classe (solutions)

17 $\dfrac{LR}{LA} = \dfrac{LB}{LT} = \dfrac{RB}{AT}$
$\dfrac{SC}{SP} = \dfrac{SD}{SM} = \dfrac{CD}{PM}$
$\dfrac{QE}{QH} = \dfrac{QV}{QF} = \dfrac{EV}{HF}$
$\dfrac{JZ}{JG} = \dfrac{JK}{JN} = \dfrac{ZK}{GN}$

18 **1. a.** OS.
b. Comme (RB) // (SO), d'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{AB}{AO} = \dfrac{AR}{AS} = \dfrac{BR}{OS}$ d'où $\dfrac{4}{5} = \dfrac{4{,}8}{OS}$
et $OS = \dfrac{4{,}8 \times 5}{4} = 6$ cm.
2. a. AR.
b. D'après la question **1** : $\dfrac{AB}{AO} = \dfrac{AR}{AS} = \dfrac{BR}{OS}$
d'où $\dfrac{4}{5} = \dfrac{AR}{4{,}5}$ et $AR = \dfrac{4 \times 4{,}5}{5} = 3{,}6$ cm.

19 **1. a.** OE.
b. Comme (EM) // (KS), d'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{OE}{OS} = \dfrac{OM}{OK} = \dfrac{EM}{SK}$ d'où $\dfrac{OE}{3} = \dfrac{2{,}8}{4{,}2}$
et $OE = \dfrac{3 \times 2{,}8}{4{,}2} = 2$ cm.
2. a. OK.
b. D'après la question **1** : $\dfrac{OE}{OS} = \dfrac{OM}{OK} = \dfrac{EM}{SK}$
d'où $\dfrac{3{,}2}{OK} = \dfrac{2{,}8}{4{,}2}$ et $OK = \dfrac{3{,}2 \times 4{,}2}{2{,}8} = 4{,}8$ cm.

20 **1.** $\left.\begin{array}{l} \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{13{,}2}{5{,}5} \text{ et } \dfrac{OB}{ON} = \dfrac{8{,}4}{3{,}5} \\ 13{,}2 \times 3{,}5 = 46{,}2 \\ 5{,}5 \times 8{,}4 = 46{,}2 \end{array}\right\}$ donc $\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{ON}$

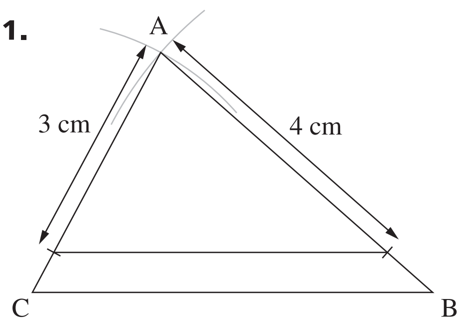
De plus, A, O, M et B, O, N sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, on est sûr que (AB) et (MN) sont parallèles.

2. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{14{,}7}{6{,}3} \text{ et } \dfrac{OB}{ON} = \dfrac{8{,}4}{3{,}5} \\ 14{,}7 \times 3{,}5 = 51{,}45 \\ 6{,}3 \times 8{,}4 = 52{,}92 \end{array}\right\}$ donc $\dfrac{OA}{OM} \neq \dfrac{OB}{ON}$

Si (AB) et (MN) étaient parallèles, d'après le théorème de Thalès, on aurait $\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{ON}$, ce qui est faux. Donc (AB) et (MN) ne sont pas parallèles.

21 $\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{4}{6}$; $\dfrac{OB}{ON} = \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{OB}{OP} = \dfrac{2}{4}$ et $\dfrac{OA}{OQ} = \dfrac{4}{7}$.
Donc $\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{ON}$ et $\dfrac{OB}{OP} \neq \dfrac{OA}{OQ}$.
(AB) et (PQ) ne peuvent pas être parallèles car si elles l'étaient, le théorème de Thalès conclurait à une égalité entre $\dfrac{OB}{OP}$ et $\dfrac{OA}{OQ}$. Ce n'est pas le cas, donc (AB) et (PQ) ne sont pas parallèles.
Kévin n'a donc pas raison, les trois droites ne sont pas parallèles.
Remarque : (AB) et (MN) sont tout de même parallèles.

22 **1.**



2. $\dfrac{5}{6} \times 4{,}8 = 4$ et $\dfrac{5}{6} \times 3{,}6 = 3$.

23 **1. a.** 4 **b.** 5 **c.** 10
2. a. $\dfrac{1}{7}$ **b.** $\dfrac{1}{6}$ **c.** $\dfrac{1}{12}$

6 Calcul mental (solutions)

24 **a.** $x = 3$ **b.** $x = 4$

25 **a.** $x = 1{,}6$ **b.** $x = 2{,}1$

7 J'évalue mes capacités (solutions)

26 **c.** **27** **b.**

28 **a.** et **c.** **29** **b.**

30 **b.** et **c.** **31** **c.**

8 Je m'entraîne (solutions)

32 **1.** $\frac{HD}{HA}=\frac{HE}{HS}=\frac{DE}{AS}$

2. $\frac{PT}{DS}=\frac{HP}{HD}=\frac{HT}{HS}$

33 **a.** $\frac{AE}{AT}=\frac{AR}{AZ}=\frac{ER}{TZ}$

b. $\frac{EM}{EC}=\frac{EO}{EH}=\frac{MO}{CH}$

34 **a.** $\frac{SQ}{SF}=\frac{SB}{SD}=\frac{QB}{FD}$

b. $\frac{BN}{BO}=\frac{BD}{BC}=\frac{ND}{OC}$

35 **1.** $\frac{BA}{BF}=\frac{BS}{BN}=\frac{AS}{FN}$

2. $\frac{AS}{AD}=\frac{AB}{AF}=\frac{SB}{DF}$

36 **1.** $\frac{KS}{KT}=\frac{KA}{KR}=\frac{SA}{TR}$

2. $\frac{TS}{TK}=\frac{TL}{TR}=\frac{SL}{KR}$

37 **1.** $\frac{EM}{ET}=\frac{EC}{EA}=\frac{MC}{TA}$

2. $\frac{AK}{AE}=\frac{AB}{AT}=\frac{KB}{ET}$

38 **1.** Les droites rouges sont toutes les trois perpendiculaires à la même droite (CK) ; elles sont donc toutes les trois parallèles.

2. $\frac{AL}{AF}=\frac{AN}{AC}=\frac{LN}{FC}$ ou $\frac{AL}{AM}=\frac{AN}{AK}=\frac{LN}{MK}$.

39 Dans le triangle SBL, les droites (AN) et (BL) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès :

$\frac{SA}{SB}=\frac{SN}{SL}=\frac{AN}{BL}$ donc $\frac{2,2}{3,3}=\frac{2,8}{SL}=\frac{AN}{4,8}$

et $SL=\frac{2,8\times 3,3}{2,2}=4,2$ cm ;

$AN=\frac{4,8\times 2,2}{3,3}=3,2$ cm .

40 Les droites (EF) et (GM) sont sécantes, les droites (GE) et (GM) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès :

$\frac{RG}{RM}=\frac{RE}{RF}=\frac{GE}{FM}$ donc $\frac{2,5}{3}=\frac{RE}{1,8}=\frac{3,5}{FM}$

et $RE=\frac{2,5\times 1,8}{3}=1,5$ cm ;

$FM=\frac{3,5\times 3}{2,5}=4,2$ cm .

41 Dans le triangle STJ, (HM) et (TJ) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès :

$\frac{SH}{ST}=\frac{SM}{SJ}=\frac{HM}{TJ}$ donc $\frac{2,4}{6}=\frac{SM}{5,5}=\frac{2}{TJ}$

et $SM=\frac{5,5\times 2,4}{6}=2,2$ cm ; $TJ=\frac{6\times 2}{2,4}=5$ cm .

$MJ = SJ - SM = 5,5 - 2,2 = 3,3$ cm .

42 $AB = AD - BD = 5,4 - 3 = 2,4$ cm .

Les droites (TM) et (DA) se coupent en B, (TD) et (AM) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès :

$\frac{BA}{BD}=\frac{BM}{BT}=\frac{AM}{DT}$ donc $\frac{5,4-3}{3}=\frac{4}{BT}=\frac{AM}{2}$

et $\frac{2,4}{3}=\frac{4}{BT}=\frac{AM}{2}$.

$BT=\frac{4\times 3}{2,4}=5$ cm

donc $TM = BT + BM = 5 + 4 = 9$ cm .

$AM=\frac{2\times 2,4}{3}=1,6$ cm .

43 **1.** $\frac{AD}{AB}=\frac{2}{3}$.

2. Les droites (MK) et (DB) sont sécantes en A, (MB) et (DK) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès :

$\frac{AD}{AB}=\frac{AK}{AM}=\frac{DK}{BM}$ donc $\frac{2}{3}=\frac{8,6}{AM}=\frac{KD}{18,9}$

d'où $AM=\frac{3\times 8,6}{2}=12,9$ cm ;

$KD=\frac{2\times 18,9}{3}=12,6$ cm .

$MK = AM + AK = 12,9 + 8,6 = 21,5$ cm .

44 **1.** $\frac{DA}{DF}=\frac{3,5}{1,5}$; $\frac{DB}{DC}=\frac{4,2}{1,8}$.

$3,5 \times 1,8 = 1,5 \times 4,2$ donc $\frac{DA}{DF}=\frac{DB}{DC}$.

De plus, les points A, D, F et B, D, C sont alignés dans cet ordre.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, (AB) et (CF) sont parallèles.

2. $\frac{AB}{AE}=\frac{3,2}{4,6}$; $\frac{AD}{AF}=\frac{3,5}{3,5+1,5}=\frac{3,5}{5}$.

$5 \times 3,2 \neq 4,6 \times 3,5$ donc $\frac{AB}{AE}\neq\frac{AD}{AF}$.

D'après le théorème de Thalès, les droites (BD) et (EF) ne sont pas parallèles.

45 Pour déterminer si les triangles OTA et OLP sont rectangles, il faut regarder si les droites (TA) et (LP) sont parallèles à (MS).

• OTA :

$\dfrac{OT}{OM}=\dfrac{3}{4,5}$; $\dfrac{OA}{OS}=\dfrac{2,6}{3,9}$.

$3\times 3,9 = 4,5\times 2,6$ donc $\dfrac{OT}{OM}=\dfrac{OA}{OS}$.

De plus, O, T, M et O, A, S sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, (TA) // (MS).

(TA) est donc perpendiculaire à (OA) d'après la propriété : « Si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. »

OTA est un triangle rectangle.

• OLP :

$\dfrac{OS}{OL}=\dfrac{3,9}{5,1}$; $\dfrac{OM}{OP}=\dfrac{4,5}{6}$.

$6\times 3,9 \neq 5,1\times 4,5$ donc $\dfrac{OS}{OL}\neq\dfrac{OM}{OP}$.

D'après le théorème de Thalès, (MS) et (LP) ne sont pas parallèles donc (LP) n'est pas perpendiculaires à (OL).

OLP n'est pas un triangle rectangle.

46 Comme $OM = ON$ et $OA = OB$, on a : $\dfrac{OA}{OM}\neq\dfrac{OB}{OM}$. De plus, les points O, A, M et O, B, M sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, (AB) et (MN) sont parallèles.

Si [MN] est horizontal, [AC] est parallèle à un segment horizontal donc [AC] l'est aussi.

9 J'approfondis (solutions)

47 **1.** (AF) et (GB) sont sécantes en C, (AB) et (GF) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès :

$\dfrac{CA}{CF}=\dfrac{CB}{CG}=\dfrac{AB}{FG}$ d'où $\dfrac{CA}{8,4}=\dfrac{CB}{CG}=\dfrac{3}{11,2}$

et $CA=\dfrac{3\times 8,4}{11,2}=2,25$ cm .

2. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{FD}{FC}=\dfrac{6,3}{8,4}\\[2mm]\dfrac{FE}{FG}=\dfrac{8,4}{11,2}\end{array}\right\}$ Comme $6,3\times 11,2 = 8,4\times 8,4$, $\dfrac{FD}{FC}=\dfrac{FE}{FG}$.

De plus, F, D, C et F, E, G sont alignés dans le même ordre.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, (GC) et (ED) sont parallèles.

48 **1.** Les droite (BB') et (CC') sont sécantes en O, et (BC) // (B'C').

D'après le théorème de Thalès :

$\dfrac{OB}{OB'}=\dfrac{OC}{OC'}$ d'où $\dfrac{4}{6}=\dfrac{OC}{4,8}$

donc $OC=\dfrac{4,8\times 4}{6}=3,2$ cm .

2. (BB') et (AA') sont sécantes en O, et (AB) // (A'B').

D'après le théorème de Thalès :

$\dfrac{OB}{OB'}=\dfrac{OA}{OA'}$ d'où $\dfrac{4}{6}=\dfrac{3}{OA'}$

donc $OA'=\dfrac{3\times 6}{4}=4,5$ cm .

3. $\dfrac{OA}{OA'}=\dfrac{OB}{OB'}$ et $\dfrac{OB}{OB'}=\dfrac{OC}{OC'}$.

On en déduit que $\dfrac{OA}{OA'}=\dfrac{OC}{OC'}$.

De plus, O, A, A' et O, C, C' sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, (AC) // (A'C').

49 **Première solution**

• Aire de ADE :

D'après le codage, ADE est une réduction de AFG de rapport $\dfrac{1}{2}$. L'aire de ADE vaut donc le quart de l'aire AFG, et donc le tiers de l'aire du trapèze jaune.

Aire de ADE = $\dfrac{12}{3}=4$ cm^2 .

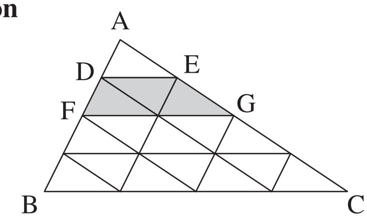
• Aire de BFGC :

D'après le codage et le théorème de Thalès, BFGC est un agrandissement de FDEG de rapport 2. L'aire est donc multipliée par 4.

Aire de BFGC = $12\times 4 = 48$ cm^2 .

• Aire de ABC = 4 + 12 + 48 = 64 cm^2 .

Deuxième solution



En appliquant plusieurs fois les théorèmes relatifs à la droite des milieux, on montre que le triangle ABC est composé de 16 triangles identiques. FDEG étant composé de trois de ces triangles, par proportionnalité, on a :

Nombre de triangles	3	16
Aire (cm^2)	12	?

$\dfrac{12\times 16}{3}=64$

L'aire de ABC est 64 cm^2 .

50 **1.** Les différentes nuances d'éclairage sont dues au fait que certaines parties de l'appartement sont éclairées par les deux lampes (donc plus éclairées) alors que d'autres ne sont éclairées que par une seule lampe, voire aucune (notamment l'entrée).

2. a. MH : (HD) et (MF) sont sécantes en C et (MH) // (DF). D'après le théorème de Thalès :

$\frac{CH}{CD}=\frac{CM}{CF}=\frac{HM}{DF}$ d'où $\frac{1,4}{3,5}=\frac{HM}{5,6}$

et $HM=\frac{1,4\times5,6}{3,5}=2,24$ m.

HP : (HD) et (PA) sont sécantes en C et (HP) // (AD). D'après le théorème de Thalès :

$\frac{CH}{CD}=\frac{CP}{CA}=\frac{HP}{DA}$ d'où $\frac{1,4}{3,5}=\frac{HP}{3,5}$ et $HP = 1,4$ m.

$MP = MH + HP = 2,24 + 1,4 = 3,64$ m.

b. JN : dans le triangle AJN, (BE) et (JN) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès :

$\frac{AB}{AJ}=\frac{AE}{AN}=\frac{BE}{JN}$ d'où $\frac{3,5}{3,5+1,4}=\frac{3,5-0,7}{JN}$

donc $JN=\frac{4,9\times2,8}{3,5}=3,92$ m.

$JP = JH + HP = 3,5 + 1,4 = 4,9$ m.

$NP = JP - JN = 4,9 - 3,92 = 0,98$ m.

c. $MN = MP - NP = 3,64 - 0,98 = 2,66$ m.

$HN = HP - NP = 1,4 - 0,98 = 0,42$ m.

51 **1.** Un agrandissement de rapport 2,5 multiplie l'aire par $2,5^2$.

Il faut donc multiplier la quantité de peinture par 6,25 : $1,5 \times 6,25 = 9,375$.

Il faut 9,375 kg de peinture.

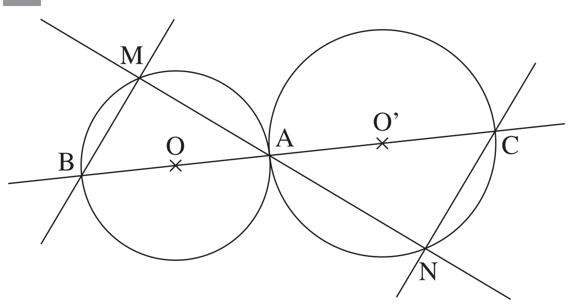
2. a. Puisqu'il faut 1,5 kg de peinture pour le premier panneau, un pot suffit.

b. Pour le deuxième panneau : $9,375 : 2 = 4,6875$.

Il faut 5 pots de peinture.

3. L'aire est multipliée par 6,25 mais le nombre de pots est multiplié par 5, donc ces quantités ne sont pas proportionnelles.

52 **1.**



2. a. (MB) et (NC) semblent parallèles.

b. D'après la propriété « Si un triangle est inscrit dans un cercle dont un diamètre est un côté, alors ce triangle est rectangle », on peut dire que BMA et ACN sont des triangles rectangles respectivement en M et N.

Les deux droites (BM) et (CN) sont donc perpendiculaires à (MN). D'après la propriété « Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles », on peut dire que (BM) et (CN) sont parallèles.

3. (MN) et (BC) sont sécantes en A, et (BM) et (CN) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès :

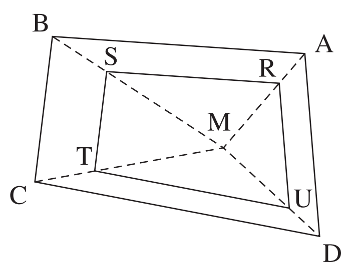
$\frac{AB}{AC}=\frac{AM}{AN}$ d'où $\frac{5}{6}=\frac{4}{AN}$

donc $AN=\frac{4\times6}{5}=4,8$ cm.

4. $\left.\begin{array}{l}\frac{AM}{AN}=\frac{4}{4,8}\\ \frac{AO}{AO'}=\frac{2,5}{3}\end{array}\right\}\ 4\times3=4,8\times2,5$ donc $\frac{AM}{AN}=\frac{AO}{AO'}$.

De plus, les points M, A, N et O, A, O' sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, (MO) et (NO') sont parallèles.

53 **1.**



2. a. (RU) et (AD) semblent parallèles.

b. En appliquant trois fois le théorème de Thalès dans les triangles AMB, BMC et CMD, on a :

$\frac{MR}{MA}=\frac{MS}{MB}$; $\frac{MS}{MB}=\frac{MT}{MC}$ et $\frac{MT}{MC}=\frac{MU}{MD}$.

Donc $\frac{MR}{MA}=\frac{MU}{MD}$. De plus, les points M, R, A et M, U, D sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, (RU) // (AD).

3. a. En appliquant quatre fois le théorème de Thalès, on a :

$\frac{MR}{MA}=\frac{SR}{BA}=\frac{MS}{MB}$; $\frac{MS}{MB}=\frac{ST}{BC}=\frac{MT}{MC}$;

$\frac{MT}{MC}=\frac{TU}{CD}=\frac{MU}{MD}$ et $\frac{MU}{MD}=\frac{UR}{DA}=\frac{MR}{MA}$.

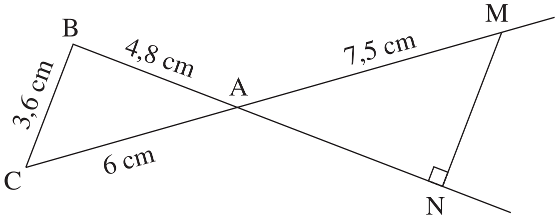
D'où $\frac{SR}{BA}=\frac{ST}{BC}=\frac{TU}{CD}=\frac{UR}{DA}=\frac{2}{3}$, donc RSTU est une réduction de ABCD de rapport $\frac{2}{3}$.

b. Les distances sont multipliées par $\frac{2}{3}$, donc les aires sont multipliées par $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

$\frac{4}{9} \times 81 = 4 \times 9 = 36 \text{ cm}^2$.

L'aire de RSTU est donc 36 cm^2.

54 **1.**



2. a.

$$\left.\begin{aligned} AC^2 &= 6^2 = 36 \\ AB^2 + BC^2 &= 4{,}8^2 + 3{,}6^2 = 36 \end{aligned}\right\} AC^2 = AB^2 + BC^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

b. On en déduit que (CB) et (MN) sont parallèles d'après la propriété : « Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles. »

3. a. (BN) et (MC) sont sécantes en A, et (MN) // (BC). D'après le théorème de Thalès :

$\frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM} = \frac{BC}{NM}$ d'où $\frac{4{,}8}{AN} = \frac{6}{7{,}5} = \frac{3{,}6}{NM}$.

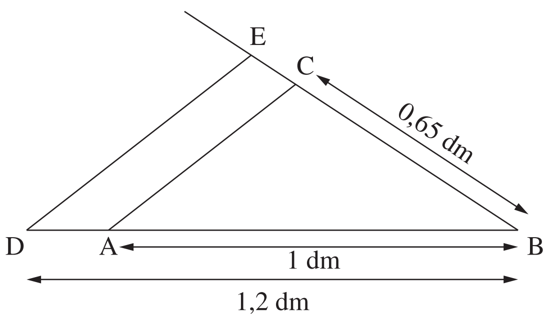
$AN = \frac{4{,}8 \times 7{,}5}{6} = 6 \text{ cm}$.

b. AN = AC donc ACN est un triangle isocèle.

55 **1. a.** D'après le théorème de Thalès, $\frac{BC}{BE} = \frac{BA}{BD}$ et comme BA est l'unité, $\frac{BC}{BE} = \frac{1}{BD}$.

Avec le produit en croix, $BE = BD \times BC$.

b. (DE) // (AC)

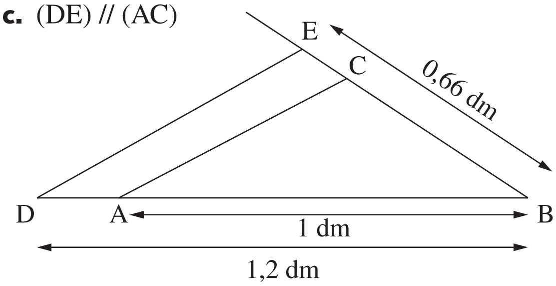


c. BE est le résultat de ce produit. En mesurant, on obtient 0,78 dm.

2. a. À la place du mot « produit », on utilise maintenant le mot « quotient ».

b. En divisant l'égalité $BE = BD \times BC$ par BD, on obtient bien $BC = \frac{BE}{BD}$.

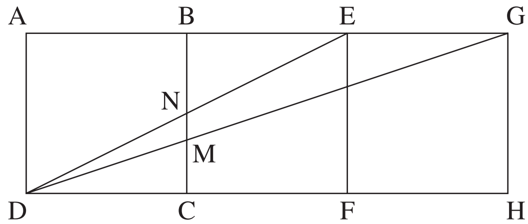
c. (DE) // (AC)



Le segment [BC] a pour longueur $\frac{0{,}66}{1{,}2}$ dm.

d. En mesurant : BC = 0,55 dm.

56



Le théorème de Thalès appliqué aux triangles DMC et DGH donne : $MC = \frac{GH}{3} = \frac{4{,}2 \text{ cm}}{3} = 1{,}4 \text{ cm}$.

En raisonnant de même dans les triangles DNC et DEF, on obtient : $NC = \frac{EF}{2} = \frac{4{,}2 \text{ cm}}{2} = 2{,}1 \text{ cm}$.

$MN = NC - MC = 2{,}1 \text{ cm} - 1{,}4 \text{ cm} = 0{,}7 \text{ cm}$.

57 • Comme (BB') // (HO), d'après le théorème de Thalès :

$\frac{AB}{AH} = \frac{BB'}{HO}$ d'où $\frac{50}{120} = \frac{BB'}{100}$ donc $BB' \approx 42$ m.

• Comme (CC') // (HO), d'après le théorème de Thalès :

$\frac{AC}{AH} = \frac{CC'}{HO}$ d'où $\frac{50+50}{120} = \frac{CC'}{100}$ donc $CC' \approx 83$ m.

• $GH = GA - AH = 6 \times 50 - 120 = 180$ m.

• Comme (DD') // (HO), d'après le théorème de Thalès :

$\frac{GD}{GH} = \frac{DD'}{HO}$ d'où $\frac{3 \times 50}{180} = \frac{DD'}{100}$ donc $DD' \approx 83$ m.

• Comme (EE') // (HO), d'après le théorème de Thalès :

$\frac{GE}{GH} = \frac{EE'}{HO}$ d'où $\frac{2 \times 50}{180} = \frac{EE'}{100}$ donc $EE' \approx 56$ m.

• Comme (FF') // (HO), d'après le théorème de Thalès :

$\frac{GF}{GH} = \frac{FF'}{HO}$ d'où $\frac{50}{180} = \frac{FF'}{100}$ donc $FF' \approx 28$ m.

58 **1.** Le théorème de Thalès appliqué aux triangles OAB et OAK dans lesquels (HA') // (AK) donne :
$\frac{OA'}{OA}=\frac{OH}{OK}=\frac{A'H}{AK}$ et $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{A'B'}{AB}$
donc $\frac{OH}{OK}=\frac{A'B'}{AB}$.
Le théorème de Thalès appliqué aux triangles OCL et OCD dans lesquels (C'H) // (CL) donne :
$\frac{OC'}{OC}=\frac{OH}{OL}=\frac{C'H}{CL}$ et $\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=\frac{C'D'}{CD}$
donc $\frac{C'D'}{CD}=\frac{OH}{OL}$.

2. Avec les produits en croix sur les deux égalités de fractions de la question **1** :
$A'B' \times OK = AB \times OH$ et $C'D' \times OL = CD \times OH$.
Comme $AB = CD$, on a bien :
$A'B' \times OK = C'D' \times OL$.

3. a. Si $OL = 2OK$, alors :
$A'B' \times OK = C'D' \times 2 \times OK$.
En simplifiant par OK : $A'B' = 2C'D'$.
b. Si $OL = 3OK$, alors avec le même raisonnement : $A'B' = 3C'D'$.

59 **1.** (AE) // (BC). D'après le théorème de Thalès :
$\frac{GE}{GB}=\frac{GA}{GC}=\frac{EA}{BC}$ d'où $\frac{1}{2}=\frac{AE}{BC}$.
Avec les produits en croix, $BC = 2AE$ donc [AE] mesure la moitié de [BC], donc la moitié de [AD] : E est le milieu de [AD].

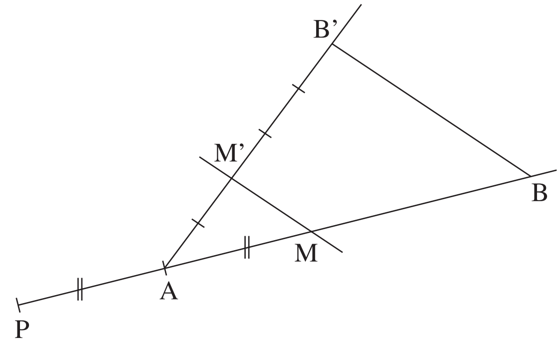
2. (ED) // (BC). D'après le théorème de Thalès :
$\frac{FE}{FB}=\frac{FD}{FC}=\frac{ED}{BC}$ d'où $\frac{FD}{FC}=\frac{1}{2}$ et $FC = 2FD$.
De plus, comme D est sur le segment [FC], D est bien le milieu de [FC].

60 **2.** $\frac{\text{aire de } O_1O_2O_3O_4}{\text{aire de MNPQ}} = 2$

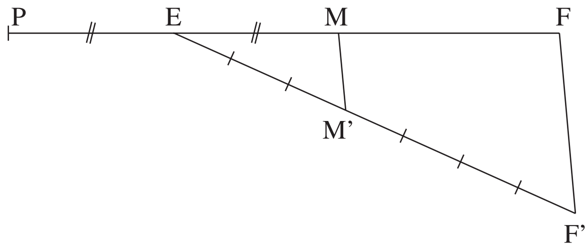
3. Comme aire de $O_1O_2O_3O_4 = O_1O_2^{\,2}$ et aire de $MNPQ = MN^2$, on a : $\frac{O_1O_2^{\,2}}{MN^2} = 2$,
$O_1O_2^{\,2} = 2MN^2$ et $O_1O_2 = \sqrt{2}MN$.

61 (AB) et (CD) sont perpendiculaires à (AC), donc (AB) // (CD) d'après la propriété : « Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles. »
D'après le théorème de Thalès :
$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$ d'où $\frac{2,1}{0,7}=\frac{0,6}{CD}$,
$CD = \frac{0,6 \times 0,7}{2,1} = 0,2$ m, $CD = 20$ cm.

62 **1. a.**, **b.**, **c.** et **e.**



d. Comme (BB') // (MM'), d'après le théorème de Thalès :
$\frac{AM'}{AB'}=\frac{AM}{AB}$ donc $\frac{2}{5}=\frac{AM}{AB}$.
f. Non.
2. (FF') // (MM')



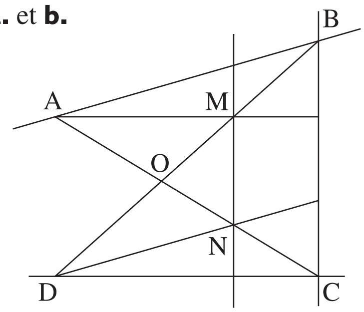
63 **a.** Oui, car (DB) et (EC) sont perpendiculaires à une même droite (AC), donc (DB) // (EC).
b. Non, car (AB) et (DE) ne sont pas parallèles.
c. Non, car (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.
Le triangle ABC est rectangle en B alors que AMN n'est pas rectangle en M.
d. Oui, PRE est un triangle rectangle car $\widehat{REP}$ et $\widehat{EPR}$ sont complémentaires.
APS est un triangle rectangle d'après la réciproque du théorème de Pythagore.
Donc (ER) et (AS) sont perpendiculaires à une même droite : (AS) // (ER).

64 **1.** La rédaction avant l'égalité de quotients est juste. La recherche de CD par les produits en croix est bien appliquée.
L'égalité de quotients de la 3e ligne est fausse. La valeur de AC n'est pas connue ($AC \neq 3,2$).
Le calcul $\frac{3,2 \times 3,6}{2,4}$ n'est pas égal à 5.

2. (AB) // (DE), donc les triangles ABC et CDE sont dans une configuration de Thalès.
D'après le théorème de Thalès : $\frac{CA}{CE}=\frac{CB}{CD}=\frac{AB}{ED}$
d'où $\frac{CA}{4,8}=\frac{1,8}{CD}=\frac{2,4}{3,6}$ et $CD = \frac{1,8 \times 3,6}{2,4} = 2,7$ cm.

10 Devoirs à la maison (solutions)

65 **1. a.** et **b.**



(MN) et (BC) semblent parallèles.

2. a. Comme (AB) // (DN), d'après le théorème de Thalès :

$\frac{ON}{OA} = \frac{OD}{OB}$.

b. Comme (AM) // (DC), d'après le théorème de Thalès :

$\frac{OM}{OD} = \frac{OA}{OC}$.

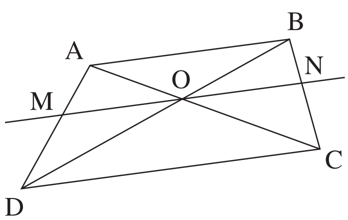
3. a. D'après la question **2**, $ON \times OB = OA \times OD$ et $OM \times OC = OD \times OA$.

Donc $ON \times OB = OM \times OC$.

b. En divisant l'égalité précédente par $OC \times OB$, on a : $\frac{ON \times \cancel{OB}}{OC \times \cancel{OB}} = \frac{OM \times \cancel{OC}}{\cancel{OC} \times OB}$ et $\frac{ON}{OC} = \frac{OM}{OB}$.

De plus, les points O, M, B et O, N, C sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, (MN) // (BC).

66 **1. a.**



b. OM et ON semblent égales.

2. a. Comme (AB) // (DC), d'après le théorème de Thalès :

$\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC} = \frac{BA}{DC}$ et $\frac{3,8}{5,7} = \frac{3}{OC}$.

Donc $OC = \frac{3 \times 5,7}{3,8} = 4,5$ cm .

$DB = DO + OB = 5,7 + 3,8 = 9,5$ cm .

$CA = CO + OA = 4,5 + 3 = 7,5$ cm .

b. Comme (AB) // (MN), on applique le théorème de Thalès dans les triangles DAB et CAB :

$\frac{DO}{DB} = \frac{DM}{DA} = \frac{OM}{BA}$ et $\frac{CO}{CA} = \frac{CN}{CB} = \frac{ON}{AB}$.

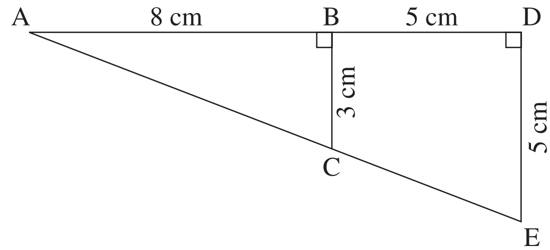
Donc $\frac{5,7}{9,5} = \frac{OM}{BA}$ et $\frac{4,5}{7,5} = \frac{ON}{AB}$.

c. $\frac{5,7}{9,5} = \frac{4,5}{7,5} = 0,6$ donc $\frac{OM}{AB} = \frac{ON}{AB}$ et $OM = ON$.

Casse-tête (solution)

67 **1.** L'aire du carré est $8^2 = 64$ cm^2 .

2.



En observant cette figure et en supposant que A, C et E sont alignés, on applique le théorème de Thalès :

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$ d'où $\frac{8}{13} = \frac{3}{5}$, ce qui est faux.

Ce qui signifie donc que les points A, C et E ne sont pas alignés.

L'assemblage de Safae ne coïncide pas vraiment, il y a un espace entre les deux triangles rectangles.

Narration de recherche (solution)

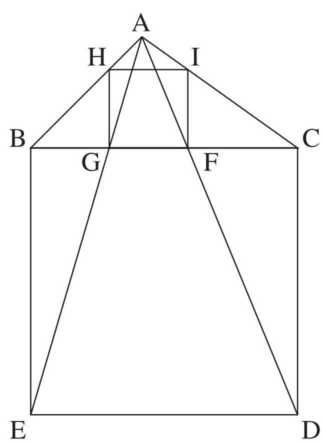
Une solution

• Construction :

– on trace le carré BCDE ;

– on trace [AE] et [AD] : ils coupent [BC] en G et F ;

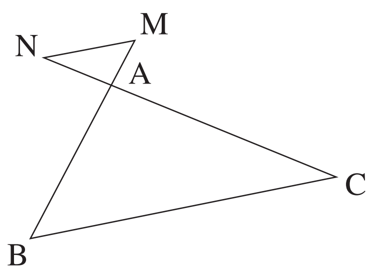
– on trace H et I sur [AB] et [AC] tels que (GH) et (FI) soient perpendiculaires à (BC).



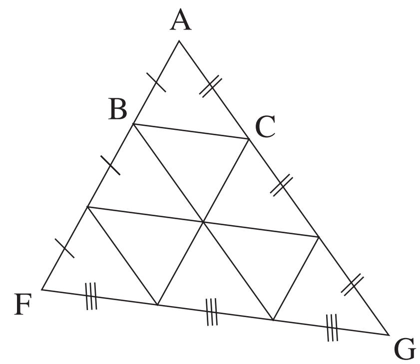
• Preuve que GFIH est un carré :
Pour simplifier, on supposera que :
BC = BE = ED = 1 .
– comme (GF) // (ED), d'après le théorème de Thalès :
$\frac{AF}{AD} = \frac{AG}{AE} = \frac{GF}{ED}$ donc $\frac{AF}{AD} = \frac{AG}{AE} = GF$;
– comme (HG) // (BE) (deux droites perpendiculaires à une même droite), d'après le théorème de Thalès :
$\frac{AG}{AE} = \frac{HG}{BE}$ donc $\frac{AG}{AE} = HG$;
– comme (IF) // (CD), d'après le théorème de Thalès :
$\frac{AF}{AD} = \frac{IF}{CD}$ donc $\frac{AF}{AD} = IF$.
Donc $GF = \frac{AG}{AE} = HG$ et $GF = \frac{AF}{AD} = IF$.
Conclusion : GF = HG = IF ;
– [GH] et [IF] sont donc parallèles et ont la même longueur, donc GFIH est un parallélogramme. De plus, GFIH a deux angles droits et trois côtés de même longueur donc c'est un carré.

11 Documents à photocopier

• Activité 1, p. 236



• Activité 3, p. 236



• Exercice 21, p. 242